Übungen zu Einführung in die lineare Algebra und Geometrie
WS 2010
Lösungen zum 2. Test vom 19.01.2011

Beispiel 1, Gruppe A
An der Zeilenstufenform kann man ablesen, dass die Matrix A Rang 3 hat (Zahl der linear unabhängigen Spalten oder Zeilen der Matrix oder der Zeilenstufenform). Ferner sieht man, dass $(1,0,1,0,0.2)$, $(0,1,1,0,0.08)$, $(0,0,0,1,0.76)$ eine Basis des Zeilenstufenraumes ist. Bezeichnen wir mit s_i die i-te Spalte. Die Pivotspalten bilden eine Basis für den Spaltenraum: $B_1 = \{s_1, s_2, s_4\}$. Die dritte Spalte ist als Linearkombination der ersten beiden Spalten schreibbar, und zwar als $s_3 = s_1 + s_2$. Eine Basis für den Spaltenraum, die s_3 enthält, erhält man also, wenn man in der Basis B_1 s_1 oder s_2 durch s_3 ersetzt. $B_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$ ist eine Basis, die s_3 enthält, $B_3 = \{s_1, s_3, s_4\}$ ebenso.

Beispiel 1, Gruppe B
An der Zeilenstufenform kann man ablesen, dass die Matrix B Rang 3 hat (Zahl der linear unabhängigen Spalten oder Zeilen der Matrix oder der Zeilenstufenform). Ferner sieht man, dass $(1,2,0,0,2.5)$, $(0,0,1,0,-1.5)$, $(0,0,0,1,2.25)$ eine Basis des Zeilenstufenraumes ist. Bezeichnen wir mit s_i die i-te Spalte. Die Pivotspalten bilden eine Basis für den Spaltenraum: $B_1 = \{s_1, s_3, s_4\}$. s_2 ist die erste linear abhängige Spalte, $s_2 = 2s_1$. Eine Basis, in der s_2 vorkommt, erhält man also, wenn man in B_1 die Spalte s_1 durch s_2 ersetzt: $B_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$. s_4 ist nicht als Linearkombination von s_1, s_2 und s_3 schreibbar: Wegen $s_2 = 2s_1$ ist das lineare Erzeugnis von $\{s_1, s_2, s_3\}$ nämlich gleich dem linearen Erzeugnis von $\{s_1, s_3\}$, aber s_4 ist nicht als Linearkombination von s_1 und s_3 darstellbar, weil $B_1 = \{s_1, s_3, s_4\}$ eine Basis des Spaltenraumes ist und daher s_1, s_3 und s_4 linear unabhängig sind (somit ist kein Vektor als Linearkombination der beiden anderen darstellbar).

Beispiel 2, Gruppe A
$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \Rightarrow p'(t) = a_1 + 2a_2 t$, $p'(t-1) = a_1 + 2a_2(t-1) = a_1 - 2a_2 + 2a_2 t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$. Die Matrix zur Abbildung T bezüglich der Basis $\mathscr{M}_2 = \{1, t, t^2\}$ lautet also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nullraum von T: $T(p) = 0$, p wie oben $\Rightarrow a_1 = 2a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$, $p(t) = a_0$. Eine Basis des Nullraumes ist also 1.

Beispiel 2, Gruppe B
$p(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \Rightarrow p'(t) = 2a_2 t + a_1$, $p'(t+2) = 2a_2(t+2) + a_1 = 2a_2 t + 4a_2 + a_1 = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$. Die Matrix zur Abbildung T bezüglich der Basis $\mathscr{M}_2 = \{t^2, t, 1\}$ lautet also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nullraum von T: $T(p) = 0$, p wie oben $\Rightarrow 2a_2 = 0$, $4a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1 = 0$, $p(t) = a_0$. Eine Basis des Nullraumes ist also 1.

Beispiel 3, Gruppe A
Weil es 3 Polynome (richtige Anzahl für eine Basis) sind, genügt es zu zeigen, dass die Standardbasis von $\mathscr{P}_2$ im linearen Erzeugnis von $\{q_1, q_2, q_3\}$ enthalten ist. Es gilt $t^2 = q_2(t)$, $1 = q_2(t) - q_1(t)$. Wegen $q_3(t) = t^2 + 2t + 1$ gilt $t = \frac{1}{2}(q_3(t) - q_2(t) - (q_2(t) - q_1(t)))$, also $t = \frac{1}{2}(q_1(t) - 2q_2(t) + q_3(t))$, womit die Behauptung bewiesen ist.
Aus der Darstellung der Standardbasiselemente folgt $p(t) = at^2 + bt + c = aq_2(t) + \frac{b}{2}(q_1(t) - 2q_2(t) + q_3(t)) + c(q_2(t) - q_1(t)) = (\frac{b}{2} - c)q_1(t) + (a - b + c)q_2(t) + \frac{b}{2}q_3(t)$. Der Koeffizientenvektor von $p(t)$ bezüglich der Basis $\{q_1, q_2, q_3\}$ lautet also $\begin{pmatrix} \frac{b}{2} - c \\ a - b + c \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$.

Alternativer Lösungsweg:
Weil es 3 Polynome im dreidimensionalen Raum sind, genügt es zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind, d.h. dass $d_1q_1(t) + d_2q_2(t) + d_3q_3(t) \equiv 0$ nur für $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ gilt. Seien also $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$.
$d_1(t^2 - 1) + d_2t^2 + d_3(t^2 + 2t + 1) = (d_1 + d_2 + d_3)t^2 + 2d_3t + (-d_1 + d_3) \equiv 0 \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = 0$, $2d_3 = 0$, $-d_1 + d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = d_2 = d_1 = 0$.
Ansatz: $at^2 + bt + c = d_1q_1(t) + d_2q_2(t) + d_3q_3(t) = (d_1 + d_2 + d_3)t^2 + 2d_3t + (-d_1 + d_3)$ (wie oben). Koeffizientenvergleich $\Rightarrow d_3 = \frac{b}{2}$, $d_1 = d_3 - c = \frac{b}{2} - c$, $d_2 = a - d_1 - d_3 = a - b + c$, d.h. wir erhalten (natürlich) den gleichen Koeffizientenvektor wie oben.

3. Möglichkeit: Es genügt zu zeigen, dass man das allgemeine Polynom als Linearkombination von $q_1(t)$, $q_2(t)$ und $q_3(t)$ darstellen kann (d.h. man zieht die Beantwortung der zweiten Frage vor). Daraus folgt, dass die Polynome ein Erzeugendensystem von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ sind. Weil es drei Stück sind, sind sie eine Basis.

Beispiel 3, Gruppe B
Weil es 3 Polynome (richtige Anzahl für eine Basis) sind, genügt es zu zeigen, dass die Standardbasis von $\mathscr{P}_2$ im linearen Erzeugnis von $\{q_1, q_2, q_3\}$ enthalten ist. Es gilt $t^2 = q_2(t)$, und aus $q_3(t) = t^2 - 2t + 1$ folgt $q_3(t) - q_2(t) + q_1(t) = -t$, also $t = -q_1(t) + q_2(t) - q_3(t)$ und damit $1 = -q_1(t) + t = -2q_1(t) + q_2(t) - q_3(t)$, womit die Behauptung bewiesen ist.
Aus der Darstellung der Standardbasiselemente folgt $p(t) = at^2 + bt + c = aq_2(t) + b(-q_1(t) + q_2(t) - q_3(t)) + c(-2q_1(t) + q_2(t) - q_3(t)) = (-b - 2c)q_1(t) + (a + b + c)q_2(t) + (-b - c)q_3(t)$.
Der Koeffizientenvektor von $p(t)$ bezüglich der Basis $\{q_1, q_2, q_3\}$ lautet also $\begin{pmatrix} -b - 2c \\ a + b + c \\ -b - c \end{pmatrix}$.

Alternativer Lösungsweg:
Weil es 3 Polynome im dreidimensionalen Raum sind, genügt es zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind, d.h. dass $d_1q_1(t) + d_2q_2(t) + d_3q_3(t) \equiv 0$ nur für $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ gilt. Seien also $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$.
$d_1(t - 1) + d_2t^2 + d_3(t^2 - 2t + 1) = (d_2 + d_3)t^2 + (d_1 - 2d_3)t + (-d_1 + d_3) \equiv 0 \Rightarrow d_2 + d_3 = 0$, $d_1 - 2d_3 = 0$, $-d_1 + d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = -d_2,\ d_1 = 2d_3 = d_3 \Rightarrow d_3 = d_1 = d_2 = 0$.
Ansatz: $at^2 + bt + c = d_1q_1(t) + d_2q_2(t) + d_3q_3(t) = (d_2 + d_3)t^2 + (d_1 - 2d_3)t + (-d_1 + d_3)$ (wie oben). Koeffizientenvergleich $\Rightarrow d_2 + d_3 = a$, $d_1 - 2d_3 = b$, $-d_1 + d_3 = c \Rightarrow -d_3 = b + c \Rightarrow d_3 = -b - c$, $d_2 = a - d_3 = a + b + c$, $d_1 = d_3 - c = -b - 2c$, d.h. wir erhalten (natürlich) den gleichen Koeffizientenvektor wie oben.
3. Möglichkeit: siehe Gruppe A.