ÜBUNGEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE LINEARE ALGEBRA UND GEOMETRIE WS 2010
LÖSUNGEN ZUM TEST VOM 1. DEZEMBER 2010

1. Aufgabe, Version A

Es gilt

$$A * A^t = \begin{pmatrix} 1 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c^2 & b+c \\ b+c & 1+b^2 \end{pmatrix}$$

und

$$A^t * A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & b+c \\ b+c & 1+c^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Normalität von A ist also notwendig und hinreichend, daß $b^2 = c^2$ gilt. Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Aufgabe, Version B

Für eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A * D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad_1 & d_2 \\ 2d_1 & bd_2 \end{pmatrix}$$

und

$$D * A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad_1 & d_1 \\ 2d_2 & bd_2 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $A * D = D * A$ ist also genau dann richtig wenn $d_1 = d_2$ gilt.(Ganz unabhängig davon welche Werte a, b annehmen.)

2. Aufgabe, Version A

Zur Berechnung der Inversen von A bilden wir das erweiterte System

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Subtraction des zweifachen der ersten Zeile von der Dritten liefert:

$$\begin{array}{lccc|ccc} & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \text{III} - 2\text{I} & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}.$$

Weiter:

$$\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{2}\mathrm{III} \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right. ,$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}-3\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right. ,$$

Also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe, Version B

Zur Berechnung der Inversen von A bilden wir das erweiterte System

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Vertauschen der ersten beiden Zeilen liefert:

$$\begin{array}{l} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. .$$

Weiter:

$$\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. ,$$

$$\begin{array}{l} \\ \frac{1}{4}\mathrm{III} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{II} \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right. ,$$

$$\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe, Version A

Ein quadratisches Polynom $q(t) = at^2 + bt + c$ hat die Ableitung $q'(t) = 2at + b$. Die Forderungen der Aufgabenstellung ergeben also das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcrcr} a & -b & +c & = & q(-1) & = & 10 \\ 2a & +b & & = & q'(1) & = & 0 \\ 4a & +2b & +c & = & q(2) & = & 7 \end{array} .$$

Wir wenden Gaußelimination auf das erweiterte System an:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array} ,\quad \begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III}-2\mathrm{II} \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} ,\quad \begin{array}{r} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} .$$

Da alle drei Diagonalelemente der letzten oberen Dreiecksmatrix von Null verschieden sind ist das System eindeutig lösbar. Zur Bestimmung der Lösung rechnen wir weiter:

$$\begin{array}{r} \\ \mathrm{II}+2\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} ,\quad \begin{array}{l} \mathrm{I}+\frac{1}{3}\mathrm{II}-\mathrm{III} \\ \frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} .$$

Also $a = 1,\ b = -2,\ c = 7$ und $q(t) = t^2 - 2t + 7$. Genau für $\beta = q(1) = 6$ ist das vergrößerte System (zusätzliche Forderung $q(1) = \beta$) im Raum der quadratischen Polynome lösbar, da das ursprüngliche System eindeutig lösbar war.

3. Aufgabe, Version B

Hier lautet das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcrcr} & b & & = & p'(0) & = & -1 \\ a & +b & +c & = & p(1) & = & 2 \\ 4a & +2b & +c & = & p(2) & = & 4 \end{array} .$$

Wir wenden Gaußelimination auf das erweiterte System an:

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{array} ,\quad \begin{array}{l} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{array} ,\quad \begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III}-4\mathrm{I}+2\mathrm{II} \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} .$$

Da alle drei Diagonalelemente der letzten oberen Dreiecksmatrix von Null verschieden sind ist das System eindeutig lösbar. Aus der letzten Zeile ergibt sich $c = 2$, aus der vorletzten $b = -1$ und die erste Gleichung bedeutet dann $a-1+2 = 2$, somit $a = 1$ und $p(t) = t^2 - t + 2$.

Durch die obigen Gleichungen ist das Polynom p bereits eindeutig bestimmt, mit $p(-1) = (-1)^2 + (-1)(-1) + 2 = 4$. Somit ist die zusätzliche vierte Gleichung im Raum der quadratischen Polynome genau für $\alpha = 4$ erfüllbar.