KOLLOQIUM zur Einführung in die
Lineare Algebra und Geometrie Hans G. Feichtinger
Wintersemester 2010

1 Multiple Choice

Wahr oder Falsch? (kurze Erläuterung?)

Jeweils ein Punkt, bzw. ein Minuspunkt bei falscher Antwort und Null Punkte bei Nichtbeantwortung.

1. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^3$ kann nicht injektiv sein.

2. .[1 Punkt] Eine Erzeuger-Menge $M \subset \mathbb{R}^5$ kann höchstens 5 Elemente haben.

3. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $p(1) = 0$ und $p'(2) = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$).

4. .[1 Punkt] Die Zusammensetzung von zwei linearen Abbildungen, welche beide injektiv sind ist injektiv.

5. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^5$ ist nie surjektiv.

6. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $p'(1) = 0$ und $p(7) = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$) **Begründung!**

7. .[2 Punkte] Sind die Polynome $p_1(t) = t^2 + 2t + 3, p_2(t) = 4t^2 + 5t + 6; p_3(t) = 7t^2 + 8t + 9$, eine Basis f.d. Raum $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ der quadr. Polynomfunktionen? (warum)

8. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ ist immer invertierbar.

9. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $\int_0^1 p(t) = 0$ und $p'(1) = 5$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol. Fkt. auf $\mathbb{R}$) **Begründung!**

10. .[2 Punkte] Kann man eine 2×2 Matrix bestimmen, wenn man beide Zeilensummen und beide Spaltensummen kennt?

11. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^3$ ist immer surjektiv.

12. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $p'(1) = 0$ und $\int_0^2 p(t)dt = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$) **Begründung!**

13. Sind die Polynome $p_1(t) = t^2 + 2t + 3, p_2(t) = 4t^2 + 5t + 6; p_3(t) = 7t^2 + 8t + 9$, eine Basis f.d. Raum $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ der quadr. Polynomfunktionen?

14. Eine Menge von Vektoren ist linear abhängig genau dann es zwei Vektoren gibt, die Vielfache voneinander sind. (Bitte genau lesen!)

15. Jede Elementarmatrix ist invertierbar.
16. Der Raum der kubischen Polynomfunktionen mit $p'(1) = 0$ und $p(2) = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.
17. Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die injektiv ist, ist auch invertierbar.
18. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^3$ ist immer surjektiv.
19. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $p'(1) = 0$ und $\int_0^2 p(t)dt = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$) **Begründung!**
20. Sind die Polynome $p_1(t) = t^2 + 2t + 3, p_2(t) = 4t^2 + 5t + 6; p_3(t) = 7t^2 + 8t + 9$, eine Basis f.d. Raum $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ der quadr. Polynomfunktionen?
21. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^5$ ist nie surjektiv.
22. .[1] Jede Menge von 5 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kann durch Weglassen von 2 Vektoren zu einer Basis gemacht werden.
23. .[1 Punkt] Der Menge der quadratischen Polynomfunktion mit $p(1) = 2$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ (quadr. Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$) (Begründung)
24. .[1 Punkt] Hat eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ eine lineare inverse Abbildung, dann ist die Abbildung selber linear!
25. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^3$ kann nicht injektiv sein.
26. .[1 Punkt] Eine Erzeuger-Menge $M \subset \mathbb{R}^5$ kann höchstens 5 Elemente haben.
27. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $p(1) = 0$ und $p'(2) = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$).
28. .[1 Punkt] Die Zusammensetzung von zwei linearen Abbildungen, welche beide injektiv sind ist injektiv.
29. Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig wenn es zwei Vektoren gibt, die Vielfache voneinander sind. . . . ☐ JA ... ☐ NEIN?
30. Die inverse zu einer Elementarmatrix ist selbst wieder eine Elementarmatrix. . . . ☐ JA ... ☐ NEIN?

31. Der Menge der kubischen Polynomfunktionen mit $p'(1) = 1$ und $p(2) = 2$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. . . . ☐ JA ... ☐ NEIN?

32. Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, die injektiv ist, ist auch invertierbar. . . . . ☐ JA ... ☐ NEIN?

33. Wenn die Komposition $T_2 \circ T_1$ von zwei linearen Abbildungen surjektiv ist, dann sind beide, also T_1, T_2 surjektiv. . . . ☐ JA ... ☐ NEIN?

34. Für jede $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ sei ρ_2 die dreifache Summe über die Elemente der zweiten Spalte, also $\rho_2(\boldsymbol{A}) = 3\sum_{j=1}^{m} a_{j,2}$. Ist dies in lineares Funktional auf dem Vektorraum der $m \times n-$Matrizen? . . . ☐ JA . . . . . . ☐ NEIN?

35. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^5$ ist nie surjektiv.

36. .[1 Punkt] Wenn ein (quadratisches) lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine Lösung hat, für ein festes $\mathbf{b}$, dann ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar.

37. .[1 Punkt] Der Menge der kubischen Polynomfunktion mit $p'(1) = 0$ und $\int_0^2 p(t)dt = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (kubische Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$) kurze **Begründung!**

38. .[1 Punkt] 4 quadratische Polynomfunktionen sind stets linear abhängig.

39. .[1 Bonus-Punkt] Die Polynome $p_1(t) = t^2 + 2t + 3, p_2(t) = 4t^2 + 5t + 6; p_3(t) = 7t^2 + 8t + 9$, bilden eine Basis f.d. Raum $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ der quadr. Polynomfunktionen. (kurze **Begründung!**).

40. Das Bild einer linear unabhängigen Menge unter einer linearen Abbildung bleibt linear unabhängig; Trivialerweise falsch, z.B. Nullabbildung!

41. $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ ist ein lineares Funktional auf $\mathbb{C}^n$.

42. Jede Elementarmatrix ist invertierbar.

43. Der Raum der kubischen Polynomfunktionen mit $p'(2) = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

44. Jede lineare Abbildung die surjektiv ist, ist auch invertierbar.

45. Wenn man im Zuge der Gauss-Elimination eine Nullzeile erzeugt, reduziert man durch eben diesen Schritt den Rang der Matrix genau um eins.