KOLLOQIUM zur Einführung in die
Lineare Algebra und Geometrie
Hans G. Feichtinger Wintersemester 2010
Datum: Freitag, 4. Mai 2012, 9:30 , Alserbachstr. 23, NuHAG

`NAME:`

`Matr.Nr.:`

1 Definitionen: [8 Pkt.] Minimum 6 Punkte!

1. .[2 Punkte] Sind die Polynomfunktionen $1, (t-1), (t-1)^2$ linear abhängig (Antwort und Begründung)?
2. .[1 Punkt] Wann ist eine Abbildung $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ linear?
3. .[1 Punkt] Was ist der Nullraum einer linearen Abbildung?
4. .[2 Punkte] Was ist der Dualraum eines Vektorraumes und was ist sein Dimension?
5. .[2 Punkte] Man beschreibe eine Basis für den Raum $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ aller kubischen Polynomfunktionen (mit kurzer Begründung, warum das eine Basis ist). Was ist die Dimension dieses Vektorraumes?

2 Sätze: [Total: 12 Pkt.]

1. .[3 Punkte] Man beschreibe den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ und entsprechenden Matrizen (im Detail!);
2. .[3 Punkte] Was sind die erlaubten Schritte der Gauss-Elimination, und was ist das Ziel der Gauss-Elimination. Wie wird die Gauss-Elimination zur Feststellung der Lösbarkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems eingesetzt (genaue verbale Beschreibung).
3. .[3 Punkte] Diverse Charakterisierungen invertierbarer Matrizen (mindestens 5 verschiedene!)
4. .[3 Punkt] Das Bild einer linear abhängigen Menge von Vektoren unter einer linearen Abbildung ist wieder eine linear abhängige Menge, d.h. es sei $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ gegeben, und $M \subset V$ eine lin. abh. Menge von $\mathbf{V}$, dann ist auch $T(M)$ lin. abh. in $\mathbf{W}$.

3 Multiple Choice: [Total: 6 Pkt.]

Wahr oder Falsch? (kurze Erläuterung?)

Jeweils ein Punkt, bzw. ein Minuspunkt bei falscher Antwort und Null Punkte bei Nichtbeantwortung.

1. .[1 Punkt] Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ ist immer invertierbar.
2. .[1 Punkt] Eine linear abhängige Teilemenge $M \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ muss mindestens 4 Elemente haben.
3. .[1 Punkt] Das Urbild einer linear abhängigen Menge ist selbst wieder linear abängig.
4. .[1 Punkt] Der Menge der quadratischen Polynomfunktion mit $\int_0^1 p(t)dt = 0$ ist ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ (quadr. Pol.Fkt. auf $\mathbb{R}$) (Begründung)
5. .[1 Punkt] Hat eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ eine lineare inverse Abbildung, dann ist die Abbildung selber linear!
6. .[1 Punkt] Die Abbildung $p(t) \mapsto [p(1), p(2), p(3), p(4)]$ von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^4$ ist injektiv.

4 Beweise, Rechenschritte, Ansätze: [10 Pkt.]

1. .[3 Punkte] Man *beweise*, dass die allgemeine Lösung eines homogenen Gleichungssystems auf folgende Weise charakterisiert werden kann: Man nimmt eine beliebige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und addiert dazu die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Was hat das mit Parameterdarstellungen von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ zu tun?
2. .[3 Punkte] Wie sieht die Matrix aus, welche die lineare Abbildung

   $$p(t) \mapsto 2 * p(t) - p'(t),$$

   welche den Vektorraum der quadratischen Polynomfunktionen $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ in sich abbildet, beschreibt? Ist diese Abbildung invertierbar? (Hinweis, wie das zu überprüfen ist sollte jedenfalls gegeben werden, wenn die Zeit f. eine Rechnung zu knapp ist).
3. .[4 Punkte] Man bestimme die inverse Matrix (unter Angabe der einzelnen Schritte, die dazu nötig sind) von

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   Wie bestimmt man die Koordinaten des Vektors $\mathbf{u} = [2, 4, 6]$ in dieser Basis? (es geht um den Ansatz, wenn Zeit bleibt, numerische Ausführung).
   Tipp: Nicht gleich losrechnen, sondern zuerst den Angabentext zu Ende lesen.