

1 STEOP Test, Examples HGFei SS13

HEUTE wurde offiziell mitgeteilt (von SPL Prof. Hoermann), dass man jedenfalls dreimal antreten darf. Trotzdem bitte keine “Spass-Versuche”.

2 Material vom letzten Tag

- Division von Polynomen (mit reellen oder komplexen Koeffizienten)
- Erstellen eines Polynoms aus den Nullstellen (1 Pkt)
- Bestimmen der Nullstellen aus den Werten des Polynoms
- Gegeben drei Punkte im Raum ($\mathbb{R}^3$), P,Q,R, bestimme man die Längen und Winkel des von diesen drei Punkten aufgespannten Dreiecks (das liegt natürlich in einer Ebene im Raum) [! mit Hilfe von Skalarprodukten]. (3 Pkt)
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Würfel alle drei geraden Zahlen zu bekommen! (1 Pkt)
- Welchen euklidischen Abstand haben die Punkte $P = [1, 2, 3, 4]$ bzw. $Q = [4, 3, 2, 1]$ in $\mathbb{R}^4$ voneinander?
- Was ist der größte gemeinsame Teiler von 360 und 144? (ev. nach zwei Methoden bestimmt)
- Multipliziere die Polynome $p(x) = (x^2 - 1)$ und $q(x) = (x^2 - 4)$ und dividiere dann (zur Probe) $r(x) = (p \cdot q)(x)$ durch $p(x)$. (2Pkt)
- Gegeben zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ finde man die Parameter-Darstellung der durch diese Punktpaare gegebenen Geraden (in der Ebene oder im Raum);
- Man schneide eine Gerade mit einer Ebene im Raum, z.B. die Ebene gegeben durch die Gleichung $x + 2y + z = 4$.
- Hinweis (wurde in der Vorlesung heute nicht ganz klar kommuniziert):
Nach Buch bzw. WIKI ist In der Algebra ist ein Integritätsring oder Integritätsbereich ein vom Nullring verschiedener **nullteilerfreier kommutativer Ring mit einem Einselement**. Bitte Mitschrift allenfalls entsprechend adaptieren.
- Ansonsten: letzte Hinweise noch morgen in der Vorlesung sowie “Ruhe bewahren”. Diejenigen, die nicht zum ersten Mal antreten mögen bitte ihre Arbeit mit einer entsprechende Zahl von Sternen versehen (z.B. ** für das zweite Antreten).

Ab hier war es schon ab 16.4. verfügbar.

NEUES MATERIAL, wird am Mi noch klarer werden, sofern es komplexe Zahlen betrifft!

1. Gegeben den Punkt $(3, 4)$ in der komplexen Ebene, finde man eine Drehstreckung, welche diesen Punkt auf $(-8, 6)$ abbildet. Bestimmung ev. auf mehrere Arten (geometrisch oder mit Hilfe der komplexen Zahlen);
2. Es seien $(G_i, \bullet_i), i = 1, 2$ zwei Gruppen. Man zeige dass mit Hilfe des kartesischen Produktes auch die Menge $G_1 \times G_2$ zu einer (genannt Produkt-)Gruppe gemacht werden kann. Man nehme sich die Konstruktion von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als additive Gruppe zum Vorbild.

3 Einige typische Multiple-Choice Fragen

Kreuzen Sie in der Folge W(ahr)/F(alsch)/N(onsense) an, wenn Sie der Meinung sind, dass die Aussage wahr bzw. Falsch ist. Wenn Sie unsicher sind, können Sie die Frage unbeantwortet lassen.

1. Huehner sind glücklich (Antwort N!);
2. Der Himmel ist blau. (J wäre argumentierbar: bei Schönwetter!)
3. π ist eine irrationale Zahl (Antwort: wahr!);
4. Das Produkt von einer geraden Zahl mit einer Primzahl ist ungerade (F!);
5. Es gibt eine quadratische Polynomfunktion mit 5 Nullstellen (!naja: hängt von der Definition ab: sollte präziser formuliert werden: in der Menge der quadratischen Polynomfkt. findet sich auch die Konstante $\equiv 0$, aber wenn der Grad gleich 2 ist, ist die Aussage falsch: Ordnung = 2, also max. 3 verschiedene Nullstellen);

Logische Aussagen, Verneinungen: [Antworten verbal formulieren]

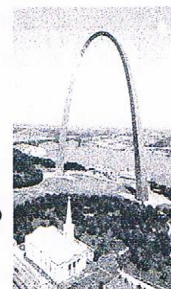
1. Nicht jede Österreicherin ist eine begeisterte SkifahrerIn;
 2. Wer reich und gesund ist hat Glück im Leben;
 3. Wer Pilot werden will, muß jung und gesund sein, also kann jemand nicht Pilot werden wenn er ... (ergänzen); [Inhalt der Aussage bitte nicht bewerten!]
 4. Alle Teilnehmer an dem Wettbewerb waren jung und lernbegierig oder aus dem Ausland und gut vorbereitet (formuliere das Gegenteil! etwa durch Beschreibung einer Situation, die dieser Aussage widerspricht);
- BEISPIEL "Brücke 1" unten enthält Teilfragen, die zum Üben geeignet erscheinen (natürlich auch der "Grand Arche"):

9.4.
HÜ

Gateway Arch

Der „Gateway Arch“ in St. Louis wurde 1963 – 1965 erbaut, er ist genauso breit wie hoch, nämlich etwa 200m. In seinem Inneren kann man mit einem Lift nach oben fahren.

- Ermittle eine Funktion 2. Grades, die den Verlauf des Bogens beschreibt!
- In welcher Höhe ist der Bogen nur noch 100m breit?
- Der Bogen reicht 20m unter die Erdoberfläche. Wie breit ist er am Fuß des Fundaments?
- Mit welcher Steigung fährt der Lift im Inneren des Bogens ab?

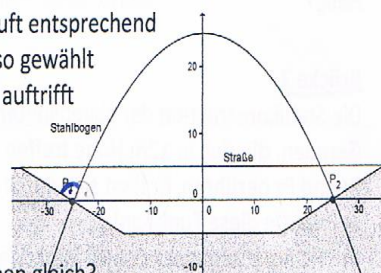


10.4.
HÜ

Brücke 1

Der Stahlbogen einer Brückenkonstruktion über einen Graben verläuft entsprechend dem Graphen einer Polynomfunktion 2. Grades. Dieser Verlauf soll so gewählt werden, dass die Konstruktion auf die Böschung im rechten Winkel auftrifft und zwar in den Punkten P_1 und P_2 . Welche größte Höhe über dem Boden des Grabens erreicht der Stahlbogen? Über welche Straßenlänge liegt er über dem Straßenniveau?

Versuche die Aufgabe auch zu lösen, indem du die Straße mit der x-Achse gleichsetzt. Welche Ergebnisse verändern sich, welche bleiben gleich?



Ab hier wurde die Zusammenstellung schon am 15.04. versandt!

Vektoren und Winkel:

Es seien g und h zwei Geraden in der Ebene, welche einander im rechten Winkel schneiden. Was kann man dann über ihre Steigungen sagen (wie ändert sich also der Normalvektor, wenn man den Vektor verändert).

Man betrachte das Problem einmal mit Vektoren, das andere Mal als ein Problem in der komplexen Ebene. Dann geht es um die Argumente von z bzw. iz ($i = \sqrt{-1}$).

PS: Lassen Sie sich nicht von der Fülle der Beispiele entmutigen, es geht mir auch darum, feedback zu bekommen bzw. Hinweise darauf, was vielleicht viele fuer einfach/schwer halten.

- Das große Auto eines Amerikaners, der an der Tankstelle eine Gallon für 0.96 US \$ = 0.73 EURO bekommt, bringt ihn ca. 26 Meilen weit. Der Oesterreicher mit seinem sparsamen Auto benötigt 6.5 l auf 100 km benoetigt, allerdings das in Oesterreich teurer Benzin zu 1.40Euro pro Liter bezahlen muss. Wer von den beiden fährt (in absoluten Kosten) guenstiger? ¹
- Gegeben ist ein Kreis in der Ebene (allgemeiner Mittelpunkt, Radius R) und eine Gerade ($y = kx + d$). Man finde die beiden Schnittpunkte (sofern es überhaupt zwei sind).
- Analog: Wie kann man die Schnittmenge von zwei Kreisen (mit allgemeinen Mittelpunkten und Radien) in der Ebene bestimmen, wie die Gleichungen (Vorschlag: Man fasse die Ebene als Gauss'sche d.h. komplexe Zahlenebene auf);

¹Quellen: <http://www.car-emissions.com/cars/model/FORD/Galaxy>
<http://www.mytravelcost.com/USA/gas-prices/>

und

- Übungsbeispiel zu Quantoren: Betrachten wir endliche Teilmengen des Einheitsquadrates $Q = [0, 1]^2$ in der Ebene. Es sei $\delta > 0$ gegeben (fest). Eine Menge $(P_i)_{i=1}^n$ in Q heißt δ -dicht, wenn die Vereinigung der Kreisscheiben mit Radius δ , nennen wir sie $K_i := B_\delta(P_i)$ die Menge Q überdecken, also $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i$ gilt. Was ist die Verneinung dieser Aussage (und geben sie eine anschauliche Interpretation dieser Aussage).

BIS HIERHER NEUES MATERIAL VOM 14.04. UND DANACH!

ALLGEMEINE BEMERKUNGEN: Auch wichtige Beweise sind zu können (genau wiederzugeben!, z.B. typische Induktionsbeweise, geometrische Reihe, etc.); Beim TEST gibt es **keine Hilfsmittel** (weder Taschenrechner, noch Mobile Phone etc.)!!

4 MATERIAL: neu: 13.04.2013

1. Man zeige, wie man mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ eine Formel für $\sin(\alpha - \beta)$ berechnen kann.
2. Gegeben ein Kreis mit Radius 5 und Mittelpunkt $(0, 0)$. Man bestimme die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden $y = 3$ und stelle den Abstand dieser beiden Punkte voneinander fest.
3. Erstellen Sie ein Abstandstabelle zwischen den 5-ten Einheitswurzeln, d.h. eine 5×5 -Tabelle (oder Matrix), in der in der Zeile j und Spalte k der Abstände der j -ten Einheitswurzel zur k -ten Einheitswurzel vermerkt ist.
4. Man beweise, dass die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl immer ungerade ist. Wie könnte man diese Aussage auf allgemeine Restklassen übertragen.
5. Wenn eine Zahl mindestens 10 Primfaktoren hat, dann muss sie größer als 1000 sein;
6. Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 48 und 72?
7. Man finde das kleinste gemeinsame Vielfache von $(x^2 - 4)$ und $(x - 2)^3$.
8. Man zeige, dass die reelle Zahl $3 + 2\sqrt{2}$ irrational ist.
9. Man beweise, dass die Komposition von zwei injektiven Abbildungen wieder injektiv ist.
10. Man beweise mit Hilfe einer Wahrheitstabelle (Unterscheidung von 8 möglichen Fällen), dass die Bildung der symmetrischen Differenz eine *assoziative* Operation ist.

5 SCHULSTOFF

z.B. die wichtigsten Tasten eines normale Taschenrechners!

(sin, cos, tan, log, ln, exp, x^2 , $\sqrt{x}$);

- Polynomfunktionen, Maxima, Kurvendiskussion;
- Rechnen mit Vektoren und komplexen Zahlen, Betrag, Polardarstellung;
- Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- lineare Gleichungen, Ungleichungen, quadratische Gleichungen;
- Vektoren: Länge, Winkel, Kreuzprodukt, Normalvektoren
- Trigonometrie: sin, cos, tan, ... und Umkehrfunktionen;
- Differenzieren,
- Integrieren
- Analytische Geometrie: Winkel zwischen zwei Geraden, Parameterform bzw. Normalvektorform, Abstand von Geraden;
- Kegelschnitte: Kreise, Ellipsen, Hyperbeln, Schnittpunkt von 2 Kreisen;
- einfache Rechenregeln f. Matrizen (Addition, Matrixmultiplikation);
- Rechnen mit Restklassen;

6 Mengen und Mengenoperationen

7 Stoff, Merksätze, Kern-Material

- Beweismethoden: *direkt*, *indirekt*, *Induktion*;
- Quantoren: ALLquantor ($\forall$), Existenzquantor ($\exists$); Verneinung von Aussagen;
- arithmetische Reihen (Gauss), geometrische Reihe, Teleskopsummen;
- Mengenlehre: Vereinigung, Durchschnitt, symm. Differenz;
- Abbildungen, Graphen von Funktionen; Relationen (Äquivalenz);
- *injektive*, *surjektive*, *bijektive* Abbildungen
(bzw. eindeutige Abbildungen, bzw. Abbildungen auf etc.);
- Quadranten, Oktanten,...

- De Morgan'sche Regeln (Komplementäraussagen);
(nicht beide oder beide nicht, weder noch = nicht dies und nicht das!).
- Urbild von Mengen (zu unterscheiden von der Urbildfunktion oder inversen Funktion, im Falle einer bijektiven Abbildung);
- 1
- 2